

Министерство науки и высшего образования РФ  
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»  
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Юрьева О.Д.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ  
СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»**

Для студентов специалитета по специальностям 10.05.01 и 10.05.03 очной  
формы обучения

Ульяновск, 2020

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Функциональный анализ» / составитель: О.Д. Юрьева. - Ульяновск: УлГУ, 2020. Настоящие методические указания предназначены для студентов специалитета по специальностям 10.05.01 и 10.05.03 очной формы обучения. В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля и тесты для самостоятельной работы. Студентам очной формы обучения они будут полезны при подготовке к лекциям, семинарам, лабораторным и курсовым работам и к экзамену по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол № [ ] от [ ] [ ] 2020 г.).

## Содержание

1. Литература для изучения дисциплины.....	4
2. Методические указания.....	6
2.1. Раздел 1. Метрические пространства.....	6
2.2. Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега .....	7
2.3. Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы.....	9
2.4. Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства.....	
2.5. Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы.....	
2.6. Раздел 6. Обобщенные функции.....	13

## 1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### основная

1. Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / Колмогоров Андрей Николаевич, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989.
2. Богданов, А. Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А. Ю. Богданов. - Ульяновск : УлГУ, 2003. URL <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf>
3. Треногин В.А., Функциональный анализ : Учебник. / Треногин В.А. - 3-е изд., испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с. - ISBN 5-9221-0272-9 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102729.html>

### дополнительная

1. Лебедев В.И., Функциональный анализ и вычислительная математика : Учеб. пособие. / Лебедев В.И. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 296 с. - ISBN 5-9221-0092-0 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100920.html>
2. Люстерник, Лазарь Аронович. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие для вузов / Люстерник Лазарь Аронович, В. И. Соболев. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009
3. Ревина С.В., Функциональный анализ в примерах и задачах : учебное пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2009. - 120 с. - ISBN 978-5-9275-0683-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785927506835.html>
4. Осиленкер, Б. П. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие / Б. П. Осиленкер. — Москва : Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 132 с. — ISBN 978-5-7264-1186-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/60819.html>

### учебно-методическая

1. Богданов, Андрей Юрьевич. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 1 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2012. URL <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/231/bogdanov3.pdf>
2. Богданов, Андрей Юрьевич. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 2 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2015. URL [http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/242/bogdanov-2\\_2015.pdf](http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/242/bogdanov-2_2015.pdf)

3. Богданов, Андрей Юрьевич. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб.-метод. пособие / Богданов Андрей Юрьевич. - Ульяновск : УлГУ, 2008. URL <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf>

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

### 2.1. РАЗДЕЛ 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

#### Основные вопросы:

1. Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства.
2. Полные метрические пространства, примеры. Неполнота пространства  $C^p[0,1]$ ,  $p \geq 1$ . Лемма о вложенных шарах.
3. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа.
4. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью.
5. Теорема Арцела. Критерий компактности в  $l_p$ ,  $p \geq 1$ . Принцип сжимающих отображений. Примеры

#### Рекомендации по изучению темы:

Вопрос 1 изложен в учебном пособии [5].

Для самостоятельного изучения вопроса 2 следует обратиться к [5, 3.1-3.4].

Вопрос 2 изложен в учебном пособии [4] на с. 11-23.

Вопрос 3 изложен в учебном пособии [4] на с. 29-31.

Вопрос 4 изложен в учебном пособии [2] на с. 10-14.

#### Контрольные вопросы по разделу 1:

1. Из каких элементов состоит пространство  $C^k[0;1]$ ?
2. Из каких элементов состоит пространство  $L^2(a;b)$ ?
3. Принадлежит ли последовательность  $x = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$  пространству  $l^2$ ?
4. Как вычислить расстояние между элементами  $x, y$  в пространстве  $C[-1;1]$ ?
5. Найти расстояние между  $x(t) = t^2$  и  $y(t) = t$  в пространстве  $L^1(0;2)$ .

#### Тесты для самостоятельной работы:

1. Какой документ, из перечисленных, не относится к сфере

### **противодействия иностранным техническим разведкам?**

- а) Федеральный закон от 27 декабря 2002 г. № 184 - ФЗ «О техническом регулировании»
- б) Федеральный закон от 27 июля 2006 г. № 149 - ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации»
- в) Федеральный закон от 27.07.2006 № 152-ФЗ «О персональных данных»
- г) Указ Президента Российской Федерации от 16 августа 2004 № 1085 «Вопросы Федеральной службы по техническому и экспортному контролю»

### **2. Какой подход предусматривает самый высокий уровень описания объекта исследования?**

- а) Структурный
- б) Параметрический
- в) Системный
- г) Функциональный

### **3. Что такое системное мышление?**

- а) Форма мышления, характеризующая способность человека на бессознательном уровне решать задачи дедуктивным методом
- б) Форма мышления, при котором человек ставит под сомнение любую информацию, и даже собственные убеждения
- в) Форма мышления, при которой человек способен выделять в анализируемом объекте существенные детали, незаметные для поверхностного взгляда

## **2.2. РАЗДЕЛ 2. МЕРА, ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА**

### **Основные вопросы:**

1. Полукольцо прямоугольников в  $R^2$  и  $\sigma$ -аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств. Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации:  $A$  измеримо по Жордану  $\Rightarrow A$  измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации.
2. Теорема о  $\sigma$ -алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке.
3. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.
4. Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры.

5. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду.
6. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства).
7. Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд с единичными интервалами. Теоремы Б. Леви, Фату и Лебега (без доказательства).
8. Теорема о полноте пространства  $L_1[0,1]$ . Теорема о сепарабельности пространства  $L_1[0,1]$  (плотность в нем непрерывных функций).

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос 1 изложен в учебном пособии [4] на с. 92-98.

Вопрос 2 изложен в учебном пособии [4] на с. 129-166.

### **Контрольные вопросы по теме 2:**

1. Пояснить сущность опасных сигналов и их источников.
2. В чём отличие функциональных сигналов от случайных?
3. Привести 3-4 примера функциональных и случайных сигналов.
4. Что такое побочные электромагнитные излучения и наводки (ПЭМИН)?
5. Пояснить физическую природу побочных преобразований акустических сигналов в электрические сигналы.
6. Пояснить физическую природу паразитных связей и наводок.
7. Пояснить физическую природу низкочастотных и высокочастотных излучений технических средств.
8. Что такое ВЧ-навязывание?
9. Пояснить физическую природу электромагнитных излучений сосредоточенных и распределённых источников.
10. Пояснить физическую природу утечки информации по цепям электропитания и заземления.

### **Тесты для самостоятельной работы:**

#### **1. К основным источникам функциональных сигналов относятся:**

- а) Излучатели акустических сигналов гидролокаторов и акустической связи
- б) Электропроводящие коммуникации здания, проходящие через контролируемую зону
- в) Средства мобильной телефонной и радиосвязи

#### **2. Емкостная паразитная связь образуется в результате:**

- а) Воздействия магнитного поля

- б) Воздействия электрического поля
- в) Воздействия активного сопротивления

**3. Низкочастотное излучение – это:**

- а) Электромагнитные поля, частота которых соответствует звуковому диапазону
- б) Электромагнитные поля, излучаемые цепями радиоэлектронных средств

**4. Что из перечисленного относится к случайным акустоэлектрическим преобразователям?**

- а) Металлические корпуса средств и приборов
- б) Монтажные провода, соединительные кабели, токопроводы печатных плат
- в) Ферромагнитные материалы в виде сердечников трансформаторов и дросселей

**5. Что из перечисленного относится к случайным акустоэлектрическим преобразователям?**

- а) Металлические корпуса средств и приборов
- б) Монтажные провода, соединительные кабели, токопроводы печатных плат
- в) Ферромагнитные материалы в виде сердечников трансформаторов и дросселей

**6. Основным распределенным источником магнитного, электрического и электромагнитного полей является:**

- а) Анизотропный излучатель
- б) Симметричный/несимметричный кабель
- в) Цепь звукоусилительной аппаратуры
- г) Кабель внутренней АТС

**7. Цепи заземления в общем случае создаются для выполнения следующих функций:**

- а) Создание электрического поля
- б) Модуляция тока электропитания токами радиоэлектронного средства
- в) Обеспечение путей для протекания возвратных (обратных) питающих и сигнальных токов

**2.3. РАЗДЕЛ 3. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ОПЕРАТОРЫ**

**Основные вопросы:**

1. Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные непрерывные функции, их норма. Эквивалентность непрерывности и



- ограниченности.
2. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к  $l_p$ ,  $p \geq 1$ .
  3. Теорема Хана-Банаха.
  4. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве.
  5. Теорема Банаха-Штейнгауза.
  6. Теорема Банаха об обратном операторе. Достаточность одного из условий  $\text{Ker } A=0$  или  $\text{Im}=L$  для обратимости оператора  $A \in L(L)$  в конечномерном пространстве  $L$ . Примеры необходимых операторов, для которых выполнено одно из условий  $\text{Ker } A=0$  или  $\text{Im}=L$ .

### Рекомендации по изучению темы:

Вопрос 1 изложен в учебном пособии [4] на с. 280-282.

Вопрос 2 изложен в учебном пособии [1] на с. 287-300.

Для самостоятельного изучения вопроса 2 следует обратиться к [2] на с. 248-278.

### Контрольные вопросы по разделу 3

1. Запишите общий вид линейного дифференциального оператора порядка  $n$ .
2. Запишите общий вид линейного интегрального оператора Фредгольма.
3. Дайте определение собственного числа и собственного вектора линейного оператора.
4. Дайте определение положительно определенного оператора.
5. Что такое норма линейного непрерывного оператора?

### Тесты для самостоятельной работы:

1. Найти расстояния между числовыми векторами  $x$  и  $y$  в пространстве  $R^n$  с тремя разными метриками  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_\infty$ . В какой метрике расстояние наибольшее, в какой наименьшее?

$$n = 5, \quad x = \left( \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}, 0, 2 \right), \quad y = \left( 0, 0, 2, -\frac{2}{3}, 2 \right)$$

2. Найти расстояние между функциями  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  в указанном пространстве.

$$x(t) = 3, \quad y(t) = \sqrt[3]{2(t+2)^2(4-t)}, \quad C[-4; 2]$$

3. Найти расстояние между бесконечными числовыми последовательностями  $x$  и  $y$  в пространстве  $l^1$ .

$$x = \left( \frac{3}{1!}, \frac{3^2}{2!}, \frac{3^3}{3!}, \frac{3^4}{4!}, \dots \right), \quad y = \left( \frac{1}{1!}, \frac{3}{2!}, \frac{3^2}{3!}, \frac{3^3}{4!}, \dots \right)$$

## 2.4. РАЗДЕЛ 4. ПРЕДГИЛЬБЕРТОВЫ И ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

### Основные вопросы:

1. Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры.
2. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС в сепарабельном гильбертовом пространстве
3. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
4. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.
5. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимости элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.

### Рекомендации по изучению темы:

Вопрос 1 изложен в учебном пособии [4] на с. 171-180.

Для самостоятельного изучения вопроса 1 следует обратиться к [2] на с. 9-17.

Вопрос 2 изложен в учебном пособии [4] на с. 169-171.

Вопрос 3 изложен в учебном пособии [4] на с. 180-190.

### Контрольные вопросы по теме 4:

1. Пояснить структуру образования канала утечки.
2. В чём заключается отличие ОТСС от ВТСС? Привести 4-5 примеров.
3. Раскрыть типовой канал утечки информации за счет возникновения паразитной генерации и самовозбуждения.
4. Раскрыть типовой канал утечки информации вследствие акусто-звуковых преобразований.
5. Раскрыть типовой канал утечки информации, образованный высокочастотным облучением и ВЧ-навязыванием.
6. Раскрыть типовой канал утечки информации по цепям электропитания и заземления.
7. Пояснить классификацию технических каналов утечки информации.
8. Основные показатели технических каналов утечки информации.

## Тесты для самостоятельной работы:

1. Для функциональной последовательности  $x_n(t)$  и функции  $x(t)$  проверить наличие равномерной и среднеквадратичной сходимости  $x_n \rightarrow x$  на промежутке  $[a;b]$ . Проиллюстрировать выводы графически (для построения графиков можно использовать математические пакеты).

$$x_n(t) = t^n - t^{2n}, \quad x(t) = 0, \quad [a;b] = [0;1]$$

2. Дано числовое уравнение, т.е. уравнение в одной вещественной неизвестной.
- А. Преобразовать уравнение к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.
  - В. Методом простых итераций найти приближенное решение с точностью  $10^{-5}$ , используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.

Для вычислений использовать математические пакеты.

$$x\sqrt{3} + \operatorname{arctg}(3x-2) = \sin^2 x$$

3. Дана система линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными.
- А. Преобразовать систему к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.
  - В. Методом простых итераций найти приближенные решения с точностью  $10^{-2}$  и с точностью  $10^{-4}$ , используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.
  - С. Найти точное решение системы и сравнить с приближенными.  
(Для вычислений использовать математические пакеты.)

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 77 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 = 62 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 59 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 84 \end{cases}$$

## 2.5. РАЗДЕЛ 5. СПЕКТР И РЕЗОЛВЕНТА ОПЕРАТОРА. СОПРЯЖЕННЫЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

### Основные вопросы:

1. Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора.

2. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора.
3. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.
4. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному.
5. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре компактного самосопряженного оператора.
6. Теорема Гильберта

#### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос 1 изложен в учебном пособии [4] на с. 352-360.

Для самостоятельного изучения вопроса 1 следует обратиться к [2] на с. 14-25.

Вопрос 2 изложен в учебном пособии [4] на с. 312-320.

Для самостоятельного изучения вопроса 2 следует обратиться к [2] на с. 26-27.

#### **Контрольные вопросы по теме 5:**

1. Что такое преобразователи акустических и вибрационных колебаний? Привести 5-6 примеров.
2. Что такое автономные закладные устройства? Привести 3-4 примера.
3. Пояснить физическую природу виброакустического канала утечки.
4. Назвать пассивные и активные способы защиты речи от несанкционированного прослушивания.
5. Основные правила выбора ограждающих конструкций выделенных помещений в процессе проектирования.
6. Типовая аппаратура активной защиты помещений от утечки речевой информации.
7. Назвать характерные особенности постановки акустических помех.
8. Основные рекомендации по выбору систем виброакустической защиты.
9. Назвать основные технические каналы утечки видовой информации.
10. Основные средства противодействия наблюдению в оптическом диапазоне.

#### **Тесты для самостоятельной работы:**

1. Для линейного дифференциального оператора  $A$  с областью определения  $D_A$  построить обратный оператор, если он существует.

$$A[x] = x' + 2tx, \quad D_A = \{x \in C^1[0;1]: x(0) = 0\}$$

2. Найти собственные числа и собственные функции линейного оператора  $A: C[a;b] \rightarrow C[a;b]$ .

$$A[x] = \int_0^{\pi} \sin t \sin s x(s) ds, \quad [a;b] = [0;\pi]$$

3. Проверить, является ли дифференциальный оператор  $A: L^2(0;1) \rightarrow L^2(0;1)$  симметричным на своей области определения  $D_A$ .

$$A[x] = tx'' + x' - t^2x, \quad D_A - \text{линейное подпространство, состоящее из дважды непрерывно дифференцируемых функций}$$

4. Найти решение уравнения  $A[x] - \lambda x = y$  в виде ряда Фурье по собственным функциям симметричного дифференциального оператора  $A$ , действующего в одном из весовых пространств  $L^{2,\xi}(a;b)$ . Проиллюстрировать решение графически.

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

$$A[x] = (t^2 - 1)x'' + tx', \quad \lambda = 7, \quad y = e^t(t^5 + 7t^4 - 9t^2 + t + 2)$$

## 2.6. РАЗДЕЛ 6. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

### Основные вопросы:

1. Пространство основных функций, его нетривиальность, сходимость в нем. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры.
2. Бесконечная дифференцируемость обобщенных функций. Сходимость обобщенных функций,  $\delta$ -образные последовательности. Примеры рядов, сходящихся в смысле обобщенных функций.
3. Преобразование Фурье обобщенных функций.

### Рекомендации по изучению темы:

Вопрос 1 изложен в учебном пособии [4] на с. 686-690.

Для самостоятельного изучения вопроса 1 следует обратиться к [2] на с. 27-29.

Вопрос 2 изложен в учебном пособии [4] на с. 423-454.

Вопрос 3 изложен в учебном пособии [4] на с. 690-696.

### Контрольные вопросы по теме 6:

1. Множество  $X$  состоит из функций  $x(t)$ , таких что  $x \in C^1[a; b]$  и выполняется условие  $x'(a) + 2x(b) = 0$ . Является ли  $X$  линейным пространством?
2. Запишите формулы: для вычисления нормы в  $l^\infty$ , скалярного произведения в  $L^{2,\xi}(a; b)$ , для проверки ортогональности в  $l^2$ .
3. Вычислите норму функции  $x(t) = t - t^2$  в пространстве  $C^1[0; 1]$ .
4. Запишите теорему Пифагора в пространстве со скалярным произведением
5. Дана ортонормированная система  $\{e_k\}$  и элементы  $x = e_1 + 2e_4$ ,  $y = 2e_1 + e_3 - e_4$ . Вычислить расстояние между  $x$  и  $y$ . Проверить, являются ли  $x$  и  $y$  ортогональными
6. Можно ли при помощи формулы  $(A, B) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$  задать скалярное произведение в пространстве  $n \times n$ -матриц?
7. Можно ли разложить функцию  $x(t) = e^t$  в ряд Фурье по системе  $\{1, \cos \pi t, \dots, \cos k\pi t, \dots\}$  в пространстве  $L^2(-1; 1)$ ?

### Тесты для самостоятельной работы:

1. Аппроксимировать функцию  $x = x(t)$  на промежутке  $[-1; 1]$  двумя способами:
  - А. при помощи ортогональных многочленов Чебышёва I рода;
  - В. при помощи многочлена Тейлора (в точке  $t_0 = 0$ ).

Число  $n$  – заданный порядок аппроксимации. Построить графики функции  $x$  и полученных аппроксимаций. Ответить на следующие вопросы, обосновав ответы численно:

- какой способ дает лучшую аппроксимацию вблизи нуля?
- какой способ дает лучшую равномерную аппроксимацию на промежутке  $[-1; 1]$ ?

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

$$x(t) = t \cos 2\pi t, \quad n = 8$$

2. Даны числа  $c_k$  – коэффициенты разложения некоторой элементарной функции  $x = x(t)$  в ряд Фурье по указанной системе многочленов. Восстановить функцию  $x$ :

- построить график частичной суммы ряда Фурье достаточно высокого порядка;
- по виду графика сделать предположение о том, какова формула функции  $x$ , и обосновать предположение численно.

Для вычислений и построения графиков использовать математические

пакеты.

$$c_0 = -\sqrt{\pi} \ln 2, \quad c_k = \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{2\pi}}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \text{многочлены Чебышёва I рода}$$